|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las identidades y las ecuaciones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_04\_CO |
| Descripción | Las identidades y las ecuaciones trigonométricas son expresiones que involucran el uso de las funciones trigonométricas a partir de conceptos propios del álgebra. En este tema se presentarán las generalidades y los aspectos operativos de estos dos conceptos. |
|  |  |

[SECCIÓN 1] **1 Las identidades trigonométricas**

En matemáticas una **identidad** es una igualdad verdadera para cualquier valor de la variable involucrada en la expresión.

Por ejemplo, las siguientes expresiones se pueden verificar para cualquier número y por lo tanto son identidades:

(*a* + *b*)2 = *a*2 + 2*ab* +*b*2

*a*2 – *b*2 = (*a* + *b*) (*a* – *b*)

Estas dos expresiones son identidades comunes en el uso del álgebra; en trigonometría también es posible plantear expresiones que sean válidas para cualquier ángulo, estas expresiones reciben el nombre de **identidades trigonométricas**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Las identidades trigonométricas** |
| **Contenido** | Una identidad trigonometrica es una expresión que involucra funciones trigonométricas y que es válida para cualquier ángulo. |

Dentro del estudio de la trigonometría se trabajan dos nociones fundamentales:

* Las identidades que han sido definidas y que no requieren ser demostradas, estas se conocen como identidades fundamentales.
* Las identidades que deben ser demostradas, estas se trabajan a partir de las identidades fundamentales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC10 |
| **Título** | Identidades trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo que expone las identitdades trigonométricas fundamentales y las que se obtienen a partir de ellas |

SECCIÓN 2] **1.1** **Las identidades fundamentales**

Se denominan **identidades fundamentales** aquellas que comúnmente no requieren ser demostradas pero que son usadas para demostrar otras identidades. Se pueden organizar en:

* identidades recíprocas
* identidades que son razón de dos funciones
* identidades pitagóricas

Las **identidades recíprocas** son aquellas que se pueden inferir a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas, estas son:

MA\_10\_04\_CO\_01

MA\_10\_04\_CO\_02

MA\_10\_04\_CO\_03





.

Las **identidades que son** **razón de dos funciones**, también son conocidas como identidades cocientes, estas se establecen a partir de la definición las funciones trigonométricas tangente y cotangente, estas son:

MA\_10\_04\_CO\_04

MA\_10\_04\_CO\_05

**Las identidades pitagóricas**, son consecuencia del teorema del teorema de Pitágoras y por esta rezón reciben su nombre. Las identidades pitagóricas son:

MA\_10\_04\_CO\_05

MA\_10\_04\_CO\_06

MA\_10\_04\_CO\_07







Para su deducción, se parte de la observación del triángulo rectángulo que forma un ángulo en posición normal en el primer cuadrante. A partir de esto, se tiene en cuenta la definición de las funciones para dicho ángulo y la definición analítica de una circunferencia con centro en el origen y radio *r*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Sobre el círculo trigonométrico se definen las funciones trigonométricas seno y coseno así:  MA\_10\_04\_CO\_08  La definicón analítica de una circunferencia con centros en el origen y radio *r* es:  *x*2 + *y*2 = *r*2 |

Ejemplo

Mostrar cómo se deduce la primera identidad pitagórica.

Se parte de la expresión *x*2 + *y*2 = *r*2.

Se divide entre *r*2 toda la expresión, así:

MA\_10\_04\_CO\_09



Se simplifica, se agrupan las potencias y se obtiene:

MA\_10\_04\_CO\_10



Se usa la definición de las funciones trigonométricas sobre el círculo trigonométrico y se obtiene:

MA\_10\_04\_CO\_11



que es equivalente a:

MA\_10\_04\_CO\_12



|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Las identidades pitagóricas** |
| **Contenido** | A paritr de la identidad  MA\_10\_04\_CO\_13    se obtienen las otras dos identidades pitagóricas:   * La segunda:   MA\_10\_04\_CO\_14    MA\_10\_04\_CO\_15     * La tercera   MA\_10\_04\_CO\_16    MA\_10\_04\_CO\_17  MA\_10\_04\_CO\_18  MA\_10\_04\_CO\_19 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | Clasifica identidades trigonométricas fundamentales |
| **Descripción** | Actividad para clasificar identidades trigonométricas fundamentales |

SECCIÓN 2] **1.2** **Las expresiones que se obtienen a partir de las identidades fundamentales**

A partir de las identidades fundamentales, y usando estrategias algebraicas, es posible obtener otras identidades que se presentan a continuación:

A partir de la identidad,

MA\_10\_04\_CO\_20

se pueden obtener las identidades:

MA\_10\_04\_CO\_21

MA\_10\_04\_CO\_22

MA\_10\_04\_CO\_23

MA\_10\_04\_CO\_24

A partir de la identidad

MA\_10\_04\_CO\_25

se obtienen las siguientes identidades:

MA\_10\_04\_CO\_26

MA\_10\_04\_CO\_27

MA\_10\_04\_CO\_28

MA\_10\_04\_CO\_29

A partir de la identidad,

MA\_10\_04\_CO\_30



se obtienen las siguientes identidades:

MA\_10\_04\_CO\_31

MA\_10\_04\_CO\_32

MA\_10\_04\_CO\_33

MA\_10\_04\_CO\_34

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Despejar expresiones cuadráticas** |
| **Contenido** | Al despejar una expresión cuadrática la raíz correspondiente puede ser positiva o negativa. Por ejemplo, en el despeje de la expresión  MA\_10\_04\_CO\_35  MA\_10\_04\_CO\_36      Para efectos de las identidades trigonométricas solamente se usará la raíz positiva. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC30 |
| **Título** | Reconoce la identidad fundamental que origina la expresión |
| **Descripción** | Actividad para reconocer la identidad fundamental que da origen a la expresión propuesta |

SECCIÓN 2] **1.3** **La verificación de una identidad trigonométrica**

Los ejercicios con identidades trigonométricas se basan en verificar, usando otras identidades, que las igualdades planteadas son verdaderas. Para ello, es necesario elegir una de las expresiones de la igualdad y conseguir llegar a la otra.

Ejemplo

Verificar que la expresión dada a continuación es una identidad:



Se elige la expresión de la izquierda para llegar a la expresión de la derecha. Se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_37



Al simplificar se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_38



Finalmente, multiplicando se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_39



Hay identidades que requieren otras estrategias algebraicas para verificarlas; entre estas estrategias están el uso de la adición o sustracción de expresiones.

Ejemplo

Verificar que la siguiente expresión es una identidad:

MA\_10\_04\_CO\_40



Se elige la expresión de la izquierda para llegar a la expresión de la derecha, pero inicialmente hay que resolver la sustracción entre las fracciones dadas:

MA\_10\_04\_CO\_41



Se organizan los términos del numerador y se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_42



Al aplicar las identidades fundamentales la expresión se puede escribir así:

MA\_10\_04\_CO\_43



Al factorizar el numerador se tiene:

MA\_10\_04\_CO\_44



Al factorizar el menos en el numerador se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_45



Finalmente, al simplificar la expresión se concluye que:

MA\_10\_04\_CO\_46



|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El proceso para verificar una identidad trigonométrica consiste en usar las identidades fundamentales y diferentes estrategias algebraicas. |

Ejemplo

Verificar que la expresión presentada a continuación es una identidad:

MA\_10\_04\_CO\_47



Al aplicar las diferentes estrategias algebraicas y las identidades fundamentales se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_48



MA\_10\_04\_CO\_49



MA\_10\_04\_CO\_50



MA\_10\_04\_CO\_51



|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Comprueba una identidad trigonométrica |
| **Descripción** | Actividad para comprobar identidades trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Demuestra las identidades trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para demostrar las identidades trigonométricas |

SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las identidades trigonométricas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las identidades trigonométricas |

[SECCIÓN 1] **2 La simplificación de expresiones trigonométricas**

Para simplificar expresiones trigonométricas es necesario hacer uso de los algoritmos empleados para reducir expresiones algebraicas e identidades trigonométricas.

Este proceso permite escribir la expresión de distintas formas, ya que al encontrar una expresión en apariencia complicada se puede reformular en una mucho más simple, como se evidencia a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_52

MA\_10\_04\_CO\_53

MA\_10\_04\_CO\_54

MA\_10\_04\_CO\_55

Aplicando la identidad Pitagórica, se obtiene:

MA\_10\_04\_CO\_56

MA\_10\_04\_CO\_57

De esta manera una expresión complicada se simplificó a una expresión más simple.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC70 |
| **Título** | Simplificación de expresiones trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo que presenta la simplificación de expresiones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Simplifica la expresión trigonométrica |
| **Descripción** | Actividad para simplificar expresiones trigonométricas |

SECCIÓN 2] **2.1** **Las identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos**

Como le sucede a la mayoría de las funciones, las funciones trigonométricos no cumplen la igualdad por tanto es necesario establecer las expresiones que definan las funciones de la suma de ángulos en términos de las funciones de cada ángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades para la suma de ángulos.** |
| **Contenido** | MA\_10\_04\_CO\_58  MA\_10\_04\_CO\_59  MA\_10\_04\_CO\_60 |

Estas identidades permiten hallar el valor exacto, del seno, coseno o tangente de un ángulo, a partir de los valores del seno y del coseno de dos ángulos conocidos.

Ejemplo

Hallar el valor exacto de las función sen 105º.

Primero se escribe el ángulo como la suma de otros ángulos de los cuales se conoce el valor del seno y el coseno: 105º = 45º +60º

Luego, se usa la identidad

MA\_10\_04\_CO\_63

Así se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_64

MA\_10\_04\_CO\_65

MA\_10\_04\_CO\_66

MA\_10\_04\_CO\_67

Es posible plantear una aplicación similar de las fórmulas cuando el ángulo dado está planteado en radianes.

Ejemplo

Hallar el valor exacto de las función dada a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_68

Se escribe el ángulo así:

MA\_10\_04\_CO\_69

Usando la identidad

MA\_10\_04\_CO\_70

MA\_10\_04\_CO\_71

MA\_10\_04\_CO\_72

MA\_10\_04\_CO\_73

SECCIÓN 2] **2.2 Las identidades trigonométricas para la diferencia de dos ángulos**

Las identidades trigonométricas para la diferencia de dos ángulos se comportan de manera similar como las identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos, como se establece a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades para la diferencia de dos ángulos** |
| **Contenido** | MA\_10\_04\_CO\_74  MA\_10\_04\_CO\_75  MA\_10\_04\_CO\_76 |

Ejemplo

Hallar el valor exacto de tan15º.

Se escribe el ángulo como 45º – 30º.

Se usa la identidad trigonométrica correspondiente y se tiene que

MA\_10\_04\_CO\_77

MA\_10\_04\_CO\_78

MA\_10\_04\_CO\_79

MA\_10\_04\_CO\_80



|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Identidades impares**  MA\_10\_04\_CO\_81  MA\_10\_04\_CO\_82  MA\_10\_04\_CO\_83  MA\_10\_04\_CO\_84  **Identidades pares**  MA\_10\_04\_CO\_85  MA\_10\_04\_CO\_86 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Practica con identidades de suma y diferencia de ángulos |
| **Descripción** | Actividad para practicar las fórmulas de suma y diferencia de ángulos |

SECCIÓN 2] **2.3** **Identidades para ángulos dobles**

En la sección anterior se establecieron las identidades trigonométricas para la suma de ángulos, en esta sección se usarán las identidades allí mencionadas para deducir las identidades para los ángulos dobles. Para ello, se tiene en cuenta que:

MA\_10\_04\_CO\_87

Así que a partir de las identidades para la suma de ángulos se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_88

MA\_10\_04\_CO\_89

MA\_10\_04\_CO\_90

MA\_10\_04\_CO\_91

MA\_10\_04\_CO\_92

MA\_10\_04\_CO\_93

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades para ángulos dobles** |
| **Contenido** | Las identidades para ángulos dobles son:  MA\_10\_04\_CO\_94  MA\_10\_04\_CO\_95  MA\_10\_04\_CO\_96 |

Ejemplo

Dada la siguiente información

MA\_10\_04\_CO\_97

hallar el valor de la expresión presentada a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_98

Para determinar el valor de la expresión se debe usar la identidad:

MA\_10\_04\_CO\_99

De esta expresión se conoce el valor del seno del ángulo pero también hay que conocer el valor del coseno. Para ello, se tienen en cuenta las siguientes deducciones:

* El ángulo está ubicado en el primer cuadrante pues es un dato del problema:
* MA\_10\_04\_CO\_100
* Las coordenadas del punto que definen el ángulo son (*x*, 3)
* El radio de la circunferencia es 5.

Por consiguiente

*x*2 + 32 = 25

*x*2 = 14

*x* = 4

Por tanto

MA\_10\_04\_CO\_104

Ahora reemplazando en la identidad se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_105

MA\_10\_04\_CO\_106

SECCIÓN 2] **2.4** **Las identidades trigonométricas para ángulos medios**

Usando las identidades de los ángulos dobles y las identidades pitagóricas es posible obtener las identidades para ángulos medios de la siguiente manera:

MA\_10\_04\_CO\_107

MA\_10\_04\_CO\_108

MA\_10\_04\_CO\_109

MA\_10\_04\_CO\_110

MA\_10\_04\_CO\_111

MA\_10\_04\_CO\_112

MA\_10\_04\_CO\_113

Si se sustituye

MA\_10\_04\_CO\_114

MA\_10\_04\_CO\_115

Por tanto al sustituir en la última expresión se obtiene:

MA\_10\_04\_CO\_116

Para obtener las respectivas identidades para el coseno y la tangente el proceso es similar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para ángulos medios** |
| **Contenido** | Las siguientes son las identidades para ángulos medios:  MA\_10\_04\_CO\_117  MA\_10\_04\_CO\_118  MA\_10\_04\_CO\_119 |

Ejemplo

Hallar el valor exacto de la expresión sen22,5º

Utilizando las identidades anteriores se tienen que:

MA\_10\_04\_CO\_120

MA\_10\_04\_CO\_121

MA\_10\_04\_CO\_122

Ejemplo

Hallar el valor exacto de la expresión cos165º

Utilizando las identidades anteriores se tienen que:

MA\_10\_04\_CO\_123

MA\_10\_04\_CO\_124

MA\_10\_04\_CO\_125

La solución es negativa, ya que el coseno del ángulo de está ubicado en el segundo cuadrante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Practica las identidades para ángulos dobles y medios |
| **Descripción** | Actividad para practicar las fórmulas de ángulos dobles y ángulos medios |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC110 |
| **Título** | Resuelve situaciones simplificando la expresión trigonométrica |
| **Descripción** | Actividad que permite identificar el método apropiado para simplificar la expresión propuesta |

SECCIÓN 2] **2.5** **La transformación de productos en sumas o sumas en productos**

Adicionalmente a las identidades que se han presentado en las secciones anteriores, es posible plantear fórmulas para escribir productos como sumas o sumas como producto. Estas fórmulas se plantan a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades para escribir un producto como una suma** |
| **Contenido** | MA\_10\_04\_CO\_126  MA\_10\_04\_CO\_127  MA\_10\_04\_CO\_128  MA\_10\_04\_CO\_129 |

Ejemplo,

Determinar el producto dado en la siguiente expresión como una diferencia.

MA\_10\_04\_CO\_130

Se aplica la identidad

MA\_10\_04\_CO\_131

Donde

MA\_10\_04\_CO\_132

MA\_10\_04\_CO\_133

Como coseno es una función par se obtiene la siguiente expresión:

MA\_10\_04\_CO\_134

MA\_10\_04\_CO\_135

MA\_10\_04\_CO\_136

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades para escribir una suma como un producto** |
| **Contenido** | MA\_10\_04\_CO\_137  MA\_10\_04\_CO\_138  MA\_10\_04\_CO\_139  MA\_10\_04\_CO\_140 |

Ejemplo

Escribir la expresión dada a continuación como un producto.

MA\_10\_04\_CO\_141

Se designa

MA\_10\_04\_CO\_142

MA\_10\_04\_CO\_143

Al usar la identidad correspondiente, se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_144

es decir,

MA\_10\_04\_CO\_145

MA\_10\_04\_CO\_146

MA\_10\_04\_CO\_147

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Transforma productos en sumas o sumas en productos |
| **Descripción** | Actividad transformar expresiones trigonométricas |

SECCIÓN 2] **2.6 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La simplificación de expresiones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividades sobre La simplificación de expresiones trigonométricas |

[SECCIÓN 1] **3 Las ecuaciones trigonométricas**

Una ecuación trigonométrica es una expresión que involucra funciones trigonométricas y que solo se verifica para algunos valores de los ángulos.

Para solucionar una ecuación trigonométrica se usan las mismas técnicas que para solucionar ecuaciones algebraicas, por esta razón se tienen en cuenta los siguientes casos:

* Ecuaciones trigonométricas lineales
* Ecuaciones trigonométricas usando factorización
* Ecuaciones trigonométricas usando identidades

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC140 |
| **Título** | Ecuaciones trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo que expone las ecuaciones trigonométricas |

SECCIÓN 2] **3.1** **Las ecuaciones trigonométricas lineales**

Una ecuación trigonométrica lineal es aquella que se puede escribir de la forma

*a*φ + *b* donde φ es una función trigonométrica

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

MA\_10\_04\_CO\_148

Siguiendo los procesos de despeje usados en álgebra se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_149

MA\_10\_04\_CO\_150

MA\_10\_04\_CO\_151

MA\_10\_04\_CO\_152

Como la función coseno es una periódica (periodo ) y se define *k* como un número entero, se tiene que la solución general de la ecuación es:

MA\_10\_04\_CO\_153

Una gráfica de la función muestra algunas de las soluciones de la ecuación

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los puntos marcados muestran los valores que son solución de la ecuación planteada. |

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

MA\_10\_04\_CO\_154

Se despeja utilizando las estrategias algebraicas así:

MA\_10\_04\_CO\_155

MA\_10\_04\_CO\_156

MA\_10\_04\_CO\_157

MA\_10\_04\_CO\_158

Usando los ángulos de referencia se logra identificar que existe un ángulo en el segundo cuadrante con el mismo valor para seno; para hallarlo se procede de la siguiente manera

MA\_10\_04\_CO\_159

MA\_10\_04\_CO\_160

Para finalizar, la solución general de la ecuación es:

MA\_10\_04\_CO\_161

MA\_10\_04\_CO\_162

Donde *k* es un número entero.

SECCIÓN 2] **3.2** **Las ecuaciones trigonométricas en forma factorizada**

Algunas ecuaciones trigonométricas requieren de un proceso algebraico previo a su solución; en la mayoría de los casos estas ecuaciones (de orden 2, 3, 4 o más) requieren ser factorizadas para poder analizar condiciones que permitan llegar a la solución.

Ejemplo

Solucionar la ecuación trigonométrica dada a continuación

MA\_10\_04\_CO\_163

Para poder analizar las soluciones se requiere factorizar. En este caso, la factorización utiliza la fórmula algebraica del trinomio *x*2 + *bx* + *c*, con la aclaración que la variable no es *x* sino el seno del ángulo.

MA\_10\_04\_CO\_164

MA\_10\_04\_CO\_165

Para el producto anterior se presentan dos soluciones.

Solución 1:

MA\_10\_04\_CO\_166

MA\_10\_04\_CO\_167

Como la función seno tiene mínimo en –1, se dice que para esta expresión no existe solución.

Solución 2:

MA\_10\_04\_CO\_168

MA\_10\_04\_CO\_169

MA\_10\_04\_CO\_170

MA\_10\_04\_CO\_171

Dado que la función seno es periódica la solución general es:

MA\_10\_04\_CO\_172

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica; plantear las soluciones solo para un periodo.

MA\_10\_04\_CO\_173



En este caso, la factorización utiliza la fórmula algebraica del trinomio *ax*2 + *bx* + *c*, con la aclaración que la variable no es *x* sino el coseno del ángulo.

MA\_10\_04\_CO\_174

MA\_10\_04\_CO\_175





Para el producto anterior se presentan dos soluciones.

Solución 1:

MA\_10\_04\_CO\_176

MA\_10\_04\_CO\_177

MA\_10\_04\_CO\_178

MA\_10\_04\_CO\_179

MA\_10\_04\_CO\_180

MA\_10\_04\_CO\_181













Solución 2:

MA\_10\_04\_CO\_182

MA\_10\_04\_CO\_183

MA\_10\_04\_CO\_184

MA\_10\_04\_CO\_185









|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La solución de una ecuación trigonométrica se puede escribir en radianes o en grados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC150 |
| **Título** | Soluciona ecuaciones lineales y en forma factorizada |
| **Descripción** | Actividad para solucionar ecuaciones trigonométricas lineales y factorizadas |

SECCIÓN 2] **3.3 Las ecuaciones trigonométricas con identidades**

Las identidades trigonométricas permiten escribir funciones en términos de otras, esto facilita, en algunas ocasiones, el proceso de solución de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo

Solucionar la siguiente ecuación trigonométrica:

MA\_10\_04\_CO\_186

En este caso, la ecuación no está en una sola variable, por lo tanto hay que utilizar una de las identidades fundamentales para dejar la expresión solamente en función de coseno, así:

MA\_10\_04\_CO\_187

MA\_10\_04\_CO\_188

MA\_10\_04\_CO\_189

MA\_10\_04\_CO\_190

Como ya se llegó a una expresión en una sola variable, en este caso coseno, se procede a solucionar la ecuación como en los casos anteriores:

MA\_10\_04\_CO\_191

MA\_10\_04\_CO\_192

Solución 1:

MA\_10\_04\_CO\_193

MA\_10\_04\_CO\_194

MA\_10\_04\_CO\_195

MA\_10\_04\_CO\_196

Solución 2:

MA\_10\_04\_CO\_197

MA\_10\_04\_CO\_198

MA\_10\_04\_CO\_199

MA\_10\_04\_CO\_200

MA\_10\_04\_CO\_201

Por tanto la solución general de la ecuación trigonométrica presentada es:

MA\_10\_04\_CO\_202

MA\_10\_04\_CO\_203

Donde *k* es un número entero.

Ejemplo

Solucionar la ecuación trigonométrica dada a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_204

Al resolverla se debe recordar que la función coseno es periódica y su periodo es . Se resuelve como se observa a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_205

MA\_10\_04\_CO\_206

Solución 1:

MA\_10\_04\_CO\_207

MA\_10\_04\_CO\_208

Solución 2:

MA\_10\_04\_CO\_209

MA\_10\_04\_CO\_210

Donde *k* es un número entero

Ejemplo

Solucionar la ecuación trigonométrica dada a continuación:

MA\_10\_04\_CO\_211

en

Se procede de la siguiente manera:

MA\_10\_04\_CO\_212

MA\_10\_04\_CO\_213

MA\_10\_04\_CO\_214

MA\_10\_04\_CO\_215

)

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Halla la solución de ecuaciones trigonométricas aplicando identidades |
| **Descripción** | Actividad para hallar la solución de ecuaciones trigonométricas con el uso de identitdades |

SECCIÓN 2] **3.4** **Las ecuaciones trigonométricas con funciones trigonométricas inversas**

Es posible plantear ecuaciones trigonométricas en las cuales se usen las funciones inversas. Para solucionar este tipo de expresiones se deben tener en cuenta las propiedades que se derivan de la composición de funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La composición entre una función y su inversa da como resultado la función identica:  MA\_10\_04\_CO\_216    Para el caso de las funciones trigonométricas se tiene que en los intervalos en los cuales la función tiene inversa se cumple que:  MA\_10\_04\_CO\_217  MA\_10\_04\_CO\_218 |

Ejemplo

Solucionar la siguiente ecuación trigonométrica:

MA\_10\_04\_CO\_219



Para resolver la ecuación, se aplican las propiedades de las funciones trigonométricas inversas:

MA\_10\_04\_CO\_220



Solución 1

MA\_10\_04\_CO\_221

MA\_10\_04\_CO\_222





Solución 2

MA\_10\_04\_CO\_223

MA\_10\_04\_CO\_224





|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Soluciona ecuaciones trigonométricas con funciones inversas |
| **Descripción** | Actividad para hallar la solución de ecuaciones trigonométricas con funciones inversas haciendo uso de calculadora |

SECCIÓN 2] **3.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las ecuaciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las ecuaciones trigonométricas |

**[SECCIÓN 1] 4 La resolución de triángulos no rectángulos**

El uso de las funciones trigonométricas y su definición sobre los triángulos actualmente tiene muchas aplicaciones en contextos cotidianos. Por ejemplo:

* Cuando se usa un test para medir la velocidad de la Internet lo que hace esta herramienta es una asociación entre la distancia a tres servidores cercanos que determinan las condiciones del servicio y su velocidad; este proceso se conoce como triangulación y usa permanentemente propiedades de los triángulos para generar los resultados.
* La navegación actual y las estimaciones de la posición de un barco, un avión o un vehículo a partir del sistema GPS se fundamenta en propiedades del planteamiento y resolución de triángulos.
* La determinación de distancias, alturas y ángulos de elevación y depresión en diferentes contextos.

Estos contextos, y muchos más, pueden ser modelados a partir de los triángulos.

Los triángulos que se trabajarán en esta sección reciben el nombre de **triángulos oblicuángulos** (pues no son rectángulos) y su resolución muestra las respuestas de diferentes interrogantes relacionados con las longitudes de los lados del triángulo o las medidas de sus ángulos internos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Resolución de triángulos** |
| **Contenido** | Resolver un triángulo es hallar la medida de sus tres lados y sus tres ángulos. |

Para solucionar un triángulo oblicuángulo es necesario conocer datos sobre sus lados o sus ángulos; teniendo en cuenta lo anterior se pueden distinguir cuatro casos:

**Primero**. Se conocen un lado y dos ángulos.

**Segundo**. Se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados.

**Tercero**. Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

**Cuarto**. Se conocen tres lados.

Estos cuatro casos dan origen a los dos teoremas para la resolución de triángulos:

* El teorema del seno.
* El teorema del coseno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Resolución de triángulos no rectángulos |
| **Descripción** | Interactivo que expone a partir de la solución de situaciones problema, la resolución de triángulos no rectángulos |

**[SECCIÓN 2] 4.1 El teorema del seno**

El **teorema del seno** plantea una relación de proporcionalidad entre la medida de los lados y de los ángulos en un triángulo oblicuángulos, se utiliza para resolver triángulos como los propuestos en el primer y segundo caso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema del seno** |
| **Contenido** | Para un triángulo de lados *a*, *b*, *c* y ángulos opuestos *A*, *B* y *C* respectivamente se cumple que:  MA\_10\_04\_CO\_225 |

Para solucionar un triángulo utilizando el teorema del seno es necesario reemplazar los datos que da el problema; para ello, se debe usar solo una de las tres igualdades que plantea el teorema.

Como se dijo antes el teorema del seno se usa para resolver triángulos en los cuales se conocen dos lados y un ángulos o dos ángulos y un lado; por tal razón al usar una de las igualdades del teorema la expresión queda con un solo término desconocido que se debe despejar por los métodos habituales de ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el triángulo para el cual *A* = 40º, *B* = 20º y *a* = 2 cm.

En este caso, se debe determinar la medida del ángulo *C* y la longitud de los lados *b* y *c*.

Como se conoce la medida de dos de los ángulos, se tiene que:

*A* + *B* + *C* = 180º

40º + 20º + *C* = 180º

*C* = 120º

Con los datos, se plantea el teorema del seno así:

MA\_10\_04\_CO\_226

MA\_10\_04\_CO\_227

MA\_10\_04\_CO\_228







En forma similar, se plantea el teorema del seno para hallar la longitud del lado *c*:

MA\_10\_04\_CO\_229

MA\_10\_04\_CO\_230

MA\_10\_04\_CO\_231







En conclusión:

*A* = 40º, *B* = 20º, *C* = 120º.

*a* = 2 cm, *b* = 1,06 cm, *c* = 2,69 cm.

En algunos casos, al resolver un triángulo usando el teorema del seno se pueden presentar dos situaciones extrañas:

* Que no exista ningún triángulo que cumpla las condiciones.
* Que existan dos triángulos que cumplan las condiciones.

Ejemplo

Resolver el triángulo para el cual *a* = 4 cm, *b* = 5 cm y *A* = 60º.

Al plantear el teorema del seno se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_232

MA\_10\_04\_CO\_233

MA\_10\_04\_CO\_234







De la definición de las funciones trigonométricas se sabe que el seno no es mayor que 1 ni menor que -1, por lo tanto no existe ningún ángulo que cumpla esta condición; por lo tanto se dice que no existe ningún triángulo que verifique las condiciones dadas.

Ejemplo

Solucionar el triángulo para el cual *b* = 4 cm , *c* = 6 cm y *B* = 20º.

En este caso se plantea el teorema del seno así:

MA\_10\_04\_CO\_235

MA\_10\_04\_CO\_236

MA\_10\_04\_CO\_237

MA\_10\_04\_CO\_238

MA\_10\_04\_CO\_239











Como en este caso hay dos ángulos para los cuales el seno tiene el valor dado, significa que hay dos triángulos que verifican las condiciones iniciales dadas en el problema; pero al usar la medida de 149,13º se puede observar no es posible construir un triángulo con un ángulo *C* de esta medida.

En conclusión, el triángulo debe tener las siguientes medidas de ángulos:

A = 60º, C = 30,86º, B = 89,14º

Es importante anotar que en algunos casos las dos soluciones que se generan al aplicar el teorema del seno si generan dos triángulos como por ejemplo para el caso en el que *a* = 6 cm, *b* = 8 cm y *A* = 35º. En este caso se generan dos triángulos:

Triángulo 1: *A* = 35º, *B* = 49,9º, *C* = 95,1º

Triángulo 2: *A* = 35º, *B* = 130,1º, *C* = 14,9º

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Aplica la ley de seno |
| **Descripción** | Actividad para solucionar triángulos no rectángulos aplicando ley de seno |

**[SECCIÓN 2] 4.2 El teorema del coseno**

El teorema del coseno plantea tres expresiones que permiten solucionar triángulos para los cuales la información que se conoce obedece al tercer y cuarto caso presentado al iniciar el tema.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema del coseno** |
| **Contenido** | Para un triángulo de lados *a*, *b*, *c* y ángulos opuestos *A*, *B* y *C* respectivamente se cumple que:  MA\_10\_04\_CO\_240  MA\_10\_04\_CO\_241  MA\_10\_04\_CO\_242 |

Para solucionar un triángulo usando el teorema del coseno es necesario revisar los datos y elegir cuál de las tres expresiones se debe usar, de tal manera que al reemplazar los datos del problema solamente quede una incógnita por despejar.

Es posible que al encontrar uno de los datos faltantes se use el teorema del seno para encontrar los demás.

Ejemplo

Resolver el triángulo para el cual *a* = 5 cm, *b* = 8 cm y *c* = 9 cm.

En este caso se podría usar cualquiera de las tres expresiones, así:

MA\_10\_04\_CO\_243

MA\_10\_04\_CO\_244

MA\_10\_04\_CO\_245

MA\_10\_04\_CO\_246

MA\_10\_04\_CO\_247











Con el valor de *A* es posible plantear el teorema del seno para encontrar el ángulo *B* o el ángulo *C*; en este caso se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_248

MA\_10\_04\_CO\_249

MA\_10\_04\_CO\_250

MA\_10\_04\_CO\_251



Con los valores de A y B se tiene que:

*A* + *B* + *C* = 180º

33,55º + 62,16º + *C* = 180º

*C* = 84,29

En conclusión:

A = 33,55º, B = 62,16º, C = 84,29º.

*a* = 5 cm, *b* = 8 cm, *c* = 9 cm.

Ejemplo

Resolver el triángulo para el cual *a* = 3 cm, *b* = 4 cm y *C* = 40º.

Se plantea el teorema del coseno para hallar el lado *c*, así:

MA\_10\_04\_CO\_252

MA\_10\_04\_CO\_253

MA\_10\_04\_CO\_254

MA\_10\_04\_CO\_255

MA\_10\_04\_CO\_256



Para hallar la medida del ángulo *A* se puede usar el teorema del seno, así:

MA\_10\_04\_CO\_257

MA\_10\_04\_CO\_258

MA\_10\_04\_CO\_259

MA\_10\_04\_CO\_260



Teniendo en cuenta las medidas de *A* y *C* se tiene que *B* = 91,38º.

En conclusión:

A = 48,61º, B = 91,38º, C = 40º.

*a* = 3 cm, *b* = 4 cm, *c* = 2,57 cm.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC210 |
| **Título** | Practica la ley de coseno |
| **Descripción** | Actividad para practicar la aplicación de la ley de coseno |

**[SECCIÓN 2] 4.3 El área de un triángulo**

En el uso de la geometría cotidiana se determinó que el área de un triángulo se definía por la expresión:

MA\_10\_04\_CO\_261



donde *a* es la base y *ha* es la altura sobre el lado *a*.

Aplicando un trigonometría se puede deducir una fórmula que permite hallar el área de un triángulo conociendo uno de sus ángulo y la medida de los dos lados que contienen este ángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG02 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo *ABC* en el cual se ha marcado la altura *ha* sobre el lado *A*. |

Para el triángulo de la imagen se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_262

MA\_10\_04\_CO\_263



Ahora, si se reemplaza la expresión para la altura en la fórmula de área se tiene que:

MA\_10\_04\_CO\_264



|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC220 |
| **Título** | Expresa el área de un triángulo usando razones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para expresar el área de un triángulo aplicando la trigonometría |

**[SECCIÓN 2] 4.4 La solución de problemas aplicando los teoremas**

Algunas situaciones en contexto se pueden modelar y solucionar usando el teorema del seno o el teorema del coseno.

Para solucionar dichas situaciones se recomiendan los siguientes pasos:

**Paso 1**. Leer atentamente el contexto e identificar los datos del problema sobre un dibujo.

**Paso 2**. Plantear la proporción que relaciona los datos del problema y el teorema del seno.

**Paso 3**. Solucionar la expresión que genera el teorema.

**Paso 4**. Responder la pregunta planteada en el problema y verificar que la respuesta es adecuada en el contexto.

Ejemplo

Dos observadores, que están a 1 000 pies uno del otro, observan un avión con ángulos de 40º y 35º respectivamente. ¿A qué altura se encuentra el avión?

Para solucionar el problema se siguen los pasos propuestos.

**Paso 1**. El dibujo que representa la situación se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | *A*  *B*  1 000 pies  40º  35º  Avión  *h* |
| **Pie de imagen** | En la imagen se muestra un dibujo que describe las condiciones del problema. |

**Pasos 2 y 3**. Inicialmente, se nombra el ángulo del avión como *C*; se sabe que *C* = 105º.

Luego, se plantea el teorema del seno para hallar la longitud del lado *a*:

MA\_10\_04\_CO\_265

MA\_10\_04\_CO\_266

MA\_10\_04\_CO\_267







Teniendo esta longitud, se aplica la definición de la función trigonométrica seno para hallar la altura *h* del avión:

MA\_10\_04\_CO\_268

MA\_10\_04\_CO\_269

MA\_10\_04\_CO\_270







**Paso 4**. El avión se encuentra a 381,69 pies de altura.

Ejemplo

Se desea enchapar con baldosas cuadradas un patio en forma triangular que tiene como medidas 6 m, 7 m y 10 m en la base de las paredes. ¿En qué ángulos deben cortarse las baldosas para que queden perfectas en las esquinas?

Para solucionar el problema se siguen los pasos propuestos.

**Paso 1**. El dibujo que representa la situación se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la imagen se muestra un dibujo que describe las condiciones del problema. |

**Pasos 2 y 3**. Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo *A*.

MA\_10\_04\_CO\_271

MA\_10\_04\_CO\_272

MA\_10\_04\_CO\_273

MA\_10\_04\_CO\_274

MA\_10\_04\_CO\_275



Para hallar los otros dos ángulos se puede usar nuevamente el teorema del coseno o usar el teorema del seno. En los dos casos, la medida de los ángulos es:

*B* = 36,18º y *C* = 100,2º.

**Paso 4**. Las baldosas del vértice correspondiente a *A* se deben cortar en un ángulo de 43,53º; las baldosas del vértice correspondiente a *B* se deben cortar en un ángulo de 36,18º y baldosas del vértice correspondiente a *C* se deben cortar en un ángulo de 100,2º.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Resuelve triángulos oblicuángulos |
| **Descripción** | Actividad para resolver triángulos oblicuángulos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Resuelve situaciones problema que involucran triángulos oblicuángulos |
| **Descripción** | Actividad para resolver situaciones problema que involucran triángulos oblicuángulos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC250 |
| **Título** | Aplica la ley del seno y del coseno en la resolución de triángulos oblicuángulos |
| **Descripción** | Interactivo que propone la aplicación de los teoremas del seno y del coseno para la resolución de triángulos oblicuángulos |

**[SECCIÓN 2] 4.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC260 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La resolución de triángulos no rectángulos |
| **Descripción** | Actividades sobre La resolución de triángulos oblicuángulos |

SECCIÓN 1] **5 Competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC270 |
| **Título** | Competencias: Aplicaciones de las identidades trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para analizar diferentes aplicaciones de las identidades trigonométricas |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC280 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evaluación sobre Las identidades y las ecuaciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC290 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre Las identidades y las ecuaciones trigonométricas |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_07\_REC00 | |
| **Web 01** | Seno de la suma de ángulos | *http://tube.geogebra.org/student/m1083711URL* |
| **Web 02** | Identidades trigonométricas | *http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo\_1.html* |
| **Web 03** | *Problemas sobre los teoremas del seno y el coseno* | *https://es.scribd.com/doc/61328774/Problemas-Resueltos-Sobre-El-Teorema-Del-Seno-y-El-Coseno* |